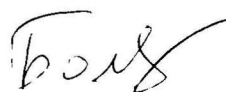


0-77551.8

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



Балуев Роман Владимирович

**СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПЛАНИРОВАНИЕ
ИЗМЕРЕНИЙ ЛУЧЕВЫХ СКОРОСТЕЙ
ВНЕСОЛНЕЧНЫХ ПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ**

01.03.01 — астрометрия и небесная механика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2009

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Холшевников Константин Владиславович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Медведев Юрий Дмитриевич,
Институт прикладной астрономии РАН

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Байкова Аниса Талгатовна,
Главная (Пулковская) астрономическая обсер-
ватория РАН

Ведущая организация: Государственный астрономический институт
им. П.К. Штернберга МГУ

Защита состоится "7" апреля 2009 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании совета
Д 212.232.15 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-
Петербургском государственном университете по адресу: 198504, г. Санкт-
Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр. 28., ауд. 2143 (математико-
механический факультет)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке СПбГУ.

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КГУ



0000506811

Автореферат разослан " 2 " марта 2009 г.

Учёный секретарь диссертационного совета

Орлов В.В.

1. Актуальность исследования

Актуальность данной работы во многом определяется чрезвычайной важностью исследований внесолнечных планетных систем. Вопрос о существовании планет у других звезд солнечного типа волновал умы человечества на протяжении по крайней мере четырех столетий. Открытие первой такой внесолнечной планеты (экзопланеты) в 1995 году [11] поставило перед астрономическим научным сообществом множество новых вопросов и породило новую область научных исследований. Эти вопросы имеют как самостоятельное научное значение, так и входят составной частью в другие научные задачи. Одной из этих задач является, например, проблема распространённости жизни во Вселенной.

Со времени открытия первой внесолнечной планеты, обращающейся вокруг звезды солнечного типа, прошло 14 лет. В течение этого промежутка времени число известных экзопланет непрерывно росло и уже превысило 300. К настоящему времени уже известно около 30 планетных систем, содержащих две или более планеты ([1, 2, 3, 4, 6], см. также профессиональный интернет-ресурс *The Extrasolar Planets Encyclopaedia*, www.exoplanet.eu). До сих пор большая часть экзопланет открывается методом лучевых скоростей. Этот метод поиска экзопланет оказался весьма эффективным на практике. Сейчас он дает новую планету в среднем каждую неделю. Суть данного метода состоит в том, что планета обнаруживается по колебанию лучевой скорости своей звезды, наблюдаемому с Земли. Лучевая скорость звезды, вокруг которой обращается невидимый (планетный) спутник, дается следующим выражением (см., например, [4, 5, 7]):

$$v = K [\cos(g + v) + e \cos g] + c. \quad (1)$$

Здесь K — амплитуда кривой лучевой скорости, g — аргумент перицентра орбиты планеты, e — эксцентриситет, v — истинная аномалия, c — лучевая скорость барицентра системы. Истинная аномалия зависит от времени, эксцентриситета e , средней долготы λ в заданный фиксированный момент времени, а также от орбитального периода P .

В выбранной параметризации величины K , P , g , e , λ представляют со-

бой первичные параметры, определяемые в ходе подгонки модельной кривой лучевой скорости (1) к имеющимся наблюдениям. Существуют также вторичные параметры — величины, определяемые как функции от первичных параметров. Ко вторичным параметрам относятся, в частности, большая полуось a ее орбиты и минимальная масса планеты $m \sin i$, где i — угол наклона плоскости орбиты к картинной плоскости. Приближенно их можно вычислить как

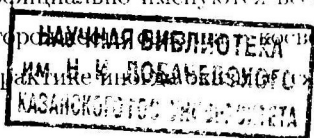
$$\begin{aligned} m \sin i &\simeq \tilde{K} \left(\frac{M_{\star}^2 P}{2\pi G} \right)^{1/3} = \mathcal{M} \tilde{K} P^{1/3} M_{\star}^{2/3}, \\ a &\simeq \left(\frac{G M_{\star} P^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \mathcal{A} P^{2/3} M_{\star}^{1/3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь G — гравитационная постоянная, M_{\star} — масса звезды, а $\tilde{K} = K\sqrt{1-e^2}$ — модифицированная амплитуда. Если период P измеряется в сутках, M_{\star} — в массах Солнца M_{\odot} , а K — в метрах в секунду, то постоянные множители $\mathcal{M} \approx 4.919 \cdot 10^{-3} [M_{\text{Юр}} M_{\odot}^{-2/3} \text{м}^{-1} \text{сут}^{-1/3} \text{сек}]$ и $\mathcal{A} \approx 1.957 \cdot 10^{-2} [M_{\odot}^{-1/3} \text{а.е. сут}^{-2/3}]$. Приближения (2) действительны при $m \ll M_{\star}$. Как известно, информацию об орбитальном наклоне i (а значит и об истинной массе планеты m) нельзя получить из наблюдений одних лучевых скоростей, если только взаимные возмущения планет в системе не удастся регистрировать напрямую в кривой лучевой скорости.

Сложившаяся ситуация «доминирования» метода лучевых скоростей делает улучшение уже имеющихся и разработку новых, более эффективных, алгоритмов статистического анализа и планирования наблюдений лучевых скоростей звезд в программах поиска экзопланет весьма актуальной задачей.

2. Цели работы

Несмотря на неоспоримые успехи программ поиска внесолнечных планет, использующих метод лучевых скоростей, до сих пор большинство открытых экзопланет официально именуются всего лишь «кандидатами» в экзопланеты. Эта осторожность обусловлена естественной природой данного метода. Например, на практике невозможно доказать, что наблюдаемая пере-



менность лучевой скорости звезды вызвана не наличием у этой звезды планеты, а какими-либо явлениями активности в звездной атмосфере, например, пятнами (см. [9]). Но параметры планет часто определяются ненадежно просто с точки зрения теории статистической обработки наблюдений. К сожалению, в погоне за быстрыми и массовыми открытиями, наблюдатели часто забывают уделять должное внимание контролю качества не только применяемых методов обработки и планирования наблюдений, но даже и результатов самих этих наблюдений. В конечном счете может оказаться, что рассматриваемые программы наблюдений в существенной части работают «вхолостую». Главная цель данной работы — представить подробный анализ качества измерений лучевых скоростей, получаемых в современных программах поиска экзопланет, алгоритмов обработки и планирования наблюдений, используемых в этих программах, а также предложить ряд практически значимых усовершенствований указанных алгоритмов. Далее мы опишем поставленные задачи более подробно.

Выделение периодичностей из зашумленных данных. Первый этап анализа измерений лучевых скоростей звезд в программах поиска экзопланет — поиск в них периодических колебаний, потенциально отражающих наличие у звезды невидимых спутников (в том числе и планет). На сегодня уже разработаны весьма эффективные методы такого анализа. В частности, в этой связи стоит упомянуть периодограмму Ломба-Скаргла [10, 15] и различные ее обобщения. Эти периодограммы позволяют легко и эффективно находить реальные периодичности в наблюдательных данных, однако не могут (сами по себе) оценивать статистическую значимость выявляемых сигналов (то есть, отличать реальные выявляемые сигналы от шумовых эффектов). Используемые обычно на практике методы оценки статистической значимости пиков периодограмм обладают существенными недостатками (например, требуют слишком большого машинного времени или обладают недостаточной математической строгостью и обоснованностью и, следовательно, дают ненадежные результаты). Таким образом, необходима какая-то новая методика оценки значимости пиков периодограмм, которая позволяла бы получать требуемые оценки быстро, с достаточной точностью и с какими-либо теоретическими гарантиями надежности.

Дрожание лучевых скоростей звезд. При анализе временных рядов лучевых скоростей звезд в программах поиска экзопланет необходимо всегда иметь в виду, что оценки инструментальной погрешности измерений не описывают полную дисперсию ошибок. Эта полная дисперсия содержит значительный добавочный компонент, который обычно называют «дрожание» («jitter»). Дополнительное кажущееся дрожание лучевой скорости изменяет соотношение статистических весов наблюдений и в конечном счете влияет на получаемые значения оценок орбитальных параметров и масс экзопланет.

В своей астрофизической части это дрожание вызывается различными явлениями активности в звездной атмосфере (и самой звезде), которые приводят к кажущейся нестабильности измеряемой лучевой скорости звезды. Наблюдаемая величина дрожания может существенно зависеть от характеристик спектрографа, условий и методики проведения наблюдений. Например, достаточно длительная экспозиция спектра (~ 20 мин) позволяет осреднить колебания видимой лучевой скорости, вызванные перадиальными звездными осцилляциями [12, 16]. Однако, как будет показано в диссертации, свой вклад в дрожание вносят и чисто инструментальные эффекты. Например, оценки «внутренних» погрешностей измерения лучевой скорости, даваемые самими наблюдателями, совсем не обязаны быть точными. Если при расчетах не учитывался какой-то дополнительный шумовой эффект, то получаемые значения погрешностей измерений могут быть систематически заниженными. Наличие в измерительных ошибках неисключенных систематических компонент также увеличивает эффективную величину дрожания. Нельзя исключать и возможности, что даваемые погрешности измерений в действительности завышены.

Указанные причины приводят к тому, что эффективные значения дрожаний лучевых скоростей звезд сильно разнятся для различных инструментов (даже для одной и той же звезды). Это означает, что при совместном анализе данных, полученных на разных обсерваториях, мы должны назначать разным массивам данных существенно различные статистические веса с использованием достаточно точных оценок эффективной величины дрожания (раздельно для каждого массива).

Обычно величина дрожания оценивается априорно на основе некоторых эмпирических корреляций с различными астрофизическими параметрами звезд, такими как, например, скорость вращения и уровень активности, измеряемый по H и K линиям кальция [13, 14, 17]. Однако таким образом мы можем принять во внимание только астрофизическую часть дрожания, а как обсуждено выше, инструментальная компонента также значительна. При этом в литературе отсутствуют работы, посвященные исследованию систематических погрешностей наблюдательных данных, получаемых в современных доплеровских программах поиска планет. Таким образом, при анализе таких временных рядов лучевых скоростей мы стоим перед проблемой корректного учета того факта, что дисперсии измерений содержат некоторый дополнительный компонент, величина которого различна для разных звезд и разных обсерваторий и плохо известна *a priori*. Этот факт необходимо корректно учитывать при нахождении оценок масс и орбитальных параметров планет.

Систематические инструментальные ошибки. На практике иногда оказывается, что наблюдаемая переменность лучевой скорости звезды вызвана не наличием у этой звезды планеты, а какими-либо явлениями активности в звездной атмосфере, например пятнами (см. например [9]). Однако в литературе фактически отсутствуют какие-либо достаточно подробные исследования *инструментальных* систематических ошибок высокоточных измерений лучевых скоростей, получаемых в программах поиска экзопланет. Вследствие таких ошибок получаемые оценки орбитальных параметров экзопланет могут оказаться сильно искаженными и ненадежными. В связи с этим возникает естественная необходимость оценки статистического качества таких наблюдений. Было бы полезно проанализировать возможность наличия систематических ошибок в опубликованных измерениях лучевых скоростей звезд с планетами, а также оценить величину и характер этих систематических ошибок.

Планирование наблюдений. При поиске внесолнечных планет методом лучевых скоростей практически не применялись какие-либо методы оптимального планирования наблюдений. Лишь в совсем недавней работе [8] опубликовано некоторое теоретическое исследование по этой теме.

При этом на практике орбитальные конфигурации многих внесолнечных планетных систем определены довольно плохо, несмотря на наличие для этих систем уже многолетних рядов наблюдений. В математической статистике теория оптимального планирования экспериментов разработана уже весьма глубоко и подробно. Таким образом, естественно возникает стремление применить общие методы оптимального планирования экспериментов для планирования наблюдений лучевых скоростей в программах поиска экзопланет. Разработка таких алгоритмов и оценка их практической эффективности также составляет одну из целей данной работы.

3. Научная и практическая ценность результатов

Разработанные в диссертации методы и алгоритмы статистического анализа и планирования наблюдений имеют весьма важное значение для наблюдательных программ поиска экзопланет. Разработанные методы могут существенно повысить эффективность этих наблюдений. В результате можно повысить точность и надежность получаемых оценок планетных параметров и частоту открытий планет.

Построенные методики обработки наблюдений могут использоваться в других областях астрономии и других наук. В частности, новая методика оценки выявления (поиска) периодичностей в наблюдательных (экспериментальных) данных, описанная в главе 2, имеет весьма универсальную область применения. Алгоритм оценки параметров модели с учетом неизвестного «дрожания» измеряемой величины (глава 3) можно использовать и в других схожих научных задачах, связанных с обработкой наблюдательных (экспериментальных) данных. Потенциально широкую область применения имеют и предложенные в диссертации алгоритмы оптимального планирования наблюдений (глава 6).

Самостоятельную ценность имеют результаты анализа наблюдательных данных трехпланетной системы HD37124 (глава 5). Эти результаты имеют большое значение для небесной механики экзопланетных систем, а также для теории образования и миграции экзопланет.

4. Новизна и достоверность результатов

Сам объект исследования — внесолнечные планеты — является новым, так как массовые открытия экзопланет начались лишь около десятилетия назад. Отметим следующие наиболее важные новые результаты, полученные в данной работе:

1. Впервые получены практически эффективные (быстро вычисляемые и имеющие хорошую точность) оценки статистической значимости периодичностей, выявляемых в зашумленных наблюдательных данных при помощи периодограммы Ломба-Скаргла и ее обобщений.
2. Впервые построена строгая методика учета эффективной величины «дрожания» лучевых скоростей звезд, основанная на методе максимального правдоподобия.
3. Впервые указано на то, что в высокоточных измерениях лучевых скоростей, получаемых в программах поиска экзопланет, присутствуют существенные систематические ошибки.
4. В ходе анализа наблюдательных данных для планетной системы HD37124 обнаружено качественно новое семейство допустимых орбитальных планетных конфигураций, соответствующее резонансу $2/1$ между двумя внешними планетами.
5. Фактически впервые были разработаны строгие методы оптимального планирования наблюдений лучевых скоростей звезд для программ поиска внесолнечных планет.¹

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием адекватных математических моделей и статистических методов, их проверкой различными численными тестами и сравнением с результатами других авторов в сопоставимых случаях.

¹ Лишь в 2008 г. по данной теме была опубликована работа зарубежных исследователей [8]. Эта работа была выполнена независимо и опубликована почти одновременно с соответствующей статьей соискателя. Впрочем, в указанной работе задача оптимального планирования наблюдений лучевых скоростей звезд решается существенно иными методами, так что аналогичные результаты соискателя не теряют своего значения.

5. Результаты, выносимые на защиту

1. Новая эффективная методика оценки статистической значимости периодичностей, выявляемых при помощи периодограммы Ломба-Скаргла и ее обобщений.
2. Алгоритм учета кажущегося дрожания лучевых скоростей звезд, основанный на методе максимального правдоподобия и позволяющий получать более точные и надежные оценки планетных параметров.
3. Обнаружение систематических ошибок годичного периода в измерениях лучевых скоростей, получаемых в современных программах поиска экзопланет.
4. Применение разработанных алгоритмов обработки наблюдений к опубликованным рядам измерений лучевой скорости звезды HD37124, вокруг которой обращаются (как минимум) три планеты-гиганта. Обоснование того, что две внешние планеты этой системы могут двигаться по орбитам с большими эксцентриситетами, не нарушая динамической устойчивости системы.
5. Алгоритмы оптимального планирования наблюдений лучевых скоростей в программах поиска экзопланет, наиболее эффективные для систем, содержащих две планеты или более, особенно при наличии резонансов.

6. Апробация работы

Результаты, полученные в ходе данного исследования, докладывались на семинарах Кафедры небесной механики СПбГУ, Института прикладной астрономии РАН, Главной (Пулковской) астрономической обсерватории РАН, ГАИШ МГУ, а также на нескольких всероссийских и международных научных конференциях: на 36-й, 37-й и 38-й международных студенческих научных конференциях «Физика космоса» (г. Екатеринбург, 2007, 2008 и 2009 г.); на всероссийской молодежной научной конференции «Физика и прогресс» (г. Санкт-Петербург, 2007 г.); на 249-м симпозиуме.

зиуме Международного Астрономического Союза «Exoplanets: Detection, Formation, and Dynamics» (г. Сучжоу, КНР, 2007 г.); на международной научной конференции «Extrasolar planets in multi-body systems: Theory and observations» (г. Торунь, Польша, 2008 г.).

7. Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав основного содержания, заключения, пяти приложений, списка литературы (102 ссылки), списка иллюстраций (24 рисунка) и списка таблиц (4 таблицы). В приложениях обсуждаются и решаются некоторые специальные математические задачи, возникшие в основном содержании. Общйй объем диссертации составляет 138 страниц.

Во *Введении (глава 1)* описываются поставленные научные задачи и цели работы, обосновывается их актуальность, описываются основные научные результаты работы. Приводится описание математических обозначений, используемых в диссертации.

Глава 2 посвящена задаче поиска периодичностей в наблюдательных данных. Здесь приводится обзор различных видов периодограмм, служащих для решения указанной задачи. Описываются результаты поиска, полученные в задаче оценки статистической значимости периодичностей, выявляемых при помощи этих периодограмм. Затем эти аналитические результаты проверяются численно методом Монте-Карло. Эта проверка показала, что полученные аналитические приближения статистической значимости имеют приемлемую практическую точность.

Глава 3 посвящена разработке новой методики учета кажущегося дрожания лучевых скоростей звезд в программах поиска экзопланет. Кроме того, здесь исследуется вопрос наличия в указанных программах периодических систематических ошибок лучевой скорости. Показано, что во многих опубликованных рядах лучевых скоростей звезд с планетными системами присутствуют периодические ошибки годового периода.

В *Главе 4* рассматриваются вопросы, связанные с нелинейностью модели лучевой скорости (1). Обсуждаются методы редукции статистическо-

го смещения оценок масс и орбитальных параметров экзопланет и методы оценки их статистической надежности.

В *Главе 5* исследуется пример трехпланетной системы HD37124. Анализируется полный массив опубликованных измерений лучевой скорости этой звезды, полученных на трех обсерваториях. Анализ выявил, в частности, новое семейство допустимых орбитальных конфигураций этой планетной системы, соответствующее резонансу $2/1$ между двумя внешними планетами.

В *Главе 6* разрабатываются алгоритмы оптимального планирования измерений лучевых скоростей в программах поиска экзопланет. Рассматриваются две практически важные задачи: планирование наблюдений с целью максимального уточнения оценок параметров планетной системы и с целью максимально эффективного различения альтернативных качественно различных орбитальных конфигураций системы. Показывается, что построенные алгоритмы оптимального планирования будут наиболее эффективны для многопланетных систем, в особенности содержащих резонансные планетные пары.

В *Заключении (глава 7)* описываются основные результаты и подводятся итоги работы.

В *Приложении А* описывается математический метод, использованный для получения замкнутых аналитических оценок статистической значимости периодограмм. Приводятся детали вычислений, связанных с применением этого метода.

В *Приложении В* приводится детальный вывод асимптотических выражений смещения и ковариационной матрицы оценок максимального правдоподобия в случае, когда измерительные ошибки распределены не по Гауссу. Эти результаты используются в главе 3.

В *Приложении С* приводится детальное описание алгоритма получения наилучших коротационных конфигураций резонансных планетных систем. Этот алгоритм используется в главе 5.

В *Приложении D* обсуждаются некоторые вопросы применения уравнений в вариациях (уравнений чувствительности) для эффективного вычисления производных подгоночной модели лучевой скорости по свобод-

ным параметрам. Эти уравнения используются сразу в нескольких разделах диссертации.

В *Приложении Е* приводятся некоторые нетривиальные матричные соотношения, используемые в главе 6.

8. Публикации по результатам работы

Основные результаты работы опубликованы соискателем в следующих статьях:

1. *Baluev R. V.* Assessing the statistical significance of periodogram peaks // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2008. — Vol. 385(3). — Pp. 1279–1285.
2. *Baluev R. V.* Optimal strategies of radial velocity observations in planet search surveys // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2008. — Vol. 389(3). — Pp. 1375–1382.
3. *Baluev R. V.* Resonances of low orders in the planetary system of HD37124 // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2008. — Vol. 102(4). — Pp. 297–325.

Литература

- [1] *Балуев Р. В.* Исследование статистических свойств экзопланет методами непрерывного вейвлет-анализа // *Вестн. СПбГУ. Сер. 1.* — 2008. — Вып. 1. — С. 135–143.
- [2] *Ксанфомалити Л. В.* История открытия внесолнечных планет // *Истор.-астрон. исслед.* — 2002. — Т. 28. — С. 54–78.
- [3] *Ксанфомалити Л. В.* Закономерности внесолнечных планетных систем и роль металличности звезд в образовании планет // *Астрон. Вестн.* — 2004. — Т. 38. — С. 428–439.
- [4] *Холшевников К. В.* Методы обнаружения и статистика внесолнечных планет // *Астрономия: традиции, настоящее, будущее* / Под ред. В. В. Орлова, В. П. Решетникова, Н. Я. Сотниковой. — Санкт-Петербург: Изд. СПбГУ, 2007. — С. 263–283.
- [5] *Холшевников К. В., Титов В. Б.* Задача двух тел. — СПб: Изд. СПбГУ, 2007.
- [6] Catalog of nearby exoplanets / R. P. Butler, J. T. Wright, G. W. Marcy, D. A. Fischer, S. S. Vogt, C. G. Tinney, H. R. A. Jones et al. // *ApJ.* — 2006. — Vol. 646. — Pp. 505–522.
- [7] *Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Beaugé C., Callegari N.* Extra-solar planetary systems — *Lect. Not. Phys.* — 2005. — Vol. 683. — Pp. 219–271.
- [8] *Ford E.* Adaptive scheduling algorithms for planet searches // *AJ.* — 2008. — Vol. 135. — Pp. 1008–1020.
- [9] The HARPS search for southern extra-solar planets. X. A $m \sin i = 11M$ planet around the nearby spotted M dwarf GJ 674 / X. Bonfils, M. Mayor, X. Delfosse, T. Forveille, M. Gillon, C. Perrier, S. Udry et al. // *A&A.* — 2007. — Vol. 474. — Pp. 293–299.

- [10] *Lomb N. R.* Least-squares frequency analysis of unequally spaced data // *ApJSS*. — 1976. — Vol. 39. — Pp. 447–462.
- [11] *Mayor M., Queloz D.* A Jupiter-mass companion to a solar-type star // *Nature*. — 1995. — Vol. 378. — Pp. 355–359.
- [12] *O'Toole S. J., Tinney C. G., Jones H. R. A.* The impact of stellar oscillations on doppler velocity planet searches // *MNRAS*. — 2008. — Vol. 386. — Pp. 516–520.
- [13] *Saar S. H., Butler R. P., Marcy G. W.* Magnetic activity-related radial velocity variations in cool stars: first results from the Lick extrasolar planet survey // *ApJ*. — 1998. — Vol. 498. — Pp. L153–L157.
- [14] *Saar S. H., Donahue R. A.* Activity-related radial velocity variation in cool stars // *ApJ*. — 1997. — Vol. 485. — Pp. 319–327.
- [15] *Scargle J. D.* Studies in astronomical time series analysis. 2. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data // *ApJ*. — 1982. — Vol. 263. — Pp. 835–853.
- [16] Setting new standards with HARPS / M. Mayor, F. Pepe, D. Queloz, F. Bouchy, G. Rupprecht, G. Lo Curto, G. Avila et al. // *The Messenger*. — 2003. — Vol. 114. — Pp. 20–24.
- [17] *Wright J. T.* Radial velocity jitter in stars from the California and Carnegie planet search at Keck observatory // *PASP*. — 2005. — Vol. 117. — Pp. 657–664.

Подписано к печати 26.02.09. Формат 60 × 84 $\frac{1}{16}$.
 Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая. Печ. л. 1,0.
 Тираж 100 экз. Заказ 4399.

Отпечатано в Отделе оперативной полиграфии химического факультета СПбГУ
 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26
 Тел.: (812) 428-4043, 428-6919

10-